

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ

ЖУРНАЛ

№ 5

МОСКВА. 1961

В. А. АМБАРЦУМЯН и Г. С. СААКЯН

О РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ СВЕРХПЛОТНЫХ
ВЫРОЖДЕННЫХ ГАЗОВЫХ МАСС

Рассчитаны конфигурации равновесия звездных масс, обладающих плотностью порядка плотности атомного ядра и состоящих из крайне вырожденного газа барионов. В отличие от работы Оппенгеймера и Волкова [4], учтено наличие гиперонов при больших плотностях. Рассмотрение ведется на основе уравнений тяготения Эйнштейна. Показана возможность равновесных конфигураций, содержащих значительное число гиперонов. Расчеты равновесных моделей проведены как для «идеального» Ферми газа, так и для «реального», в котором учитывается взаимодействие частиц.

ON THE EQUILIBRIUM CONFIGURATIONS OF SUPERDENSE DEGENERATE GAS, by V. A. Ambartsumian and G. S. Saakyan.— Equilibrium configurations of stellar masses with a density of the order of an atom nucleus and consisting of highly degenerate gas bariones are computed. The investigation differs from that of Oppenheimer and Volkov (4), in that the presence of hyperons at high densities is taken into account. The calculations are based on the Einstein gravity equations. The possibility of equilibrium configurations, containing a considerable number of hyperons, is shown. Equilibrium models are computed for the «ideal» Fermi gas and also for a «real» gas in which the interaction of particles is taken into account.

§ 1. Введение

Как известно [1, 2] при плотностях материи $\rho > 10^9 \text{ г/см}^3$ сложные атомные ядра не могут существовать. Когда плотность вещества, повышаясь, достигает этого значения, совокупность ядер превращается в совокупность простых нуклонов. Если температура настолько низка, что электроны и нуклоны вырождены, то при дальнейшем повышении плотности, а именно, при $\rho \sim 3 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$, нейтроны начинают численно преобладать над протонами и электронами, а при $\rho \sim 10^{12} \text{ г/см}^3$ они начинают преобладать и по создаваемому ими давлению [3]. Таким образом сверхплотные звездные массы при $\rho \gtrsim 10^{12} \text{ г/см}^3$ должны состоять преимущественно из нейтронов.

Равновесные конфигурации нейтронных звезд были исследованы Оппенгеймером и Волковым [4]. Ими было показано, что массы нейтронных звезд должны иметь значения, заключенные в интервале $0,3\odot < M \leq 0,7\odot$, а радиус — в пределах $6 \lesssim R \lesssim 20 \text{ км}$. Это является основным результатом их работы. В их расчетах принималось, что вплоть до сколь угодно больших плотностей нейтроны образуют идеальный газ (конечно, вырожденный).

Некоторое дальнейшее развитие вопроса было достигнуто в недавней работе Камерона [5]. Им были учтены силы взаимного отталкивания нейтронов, действующие на малых расстояниях между ними. В результате оказалось, что массы некоторых конфигураций нейтронных звезд могут достигать $2\odot$. Камерон, независимо от авторов настоящей статьи, отметил, что при достаточно больших плотностях в вырожденных звездах должны появиться гипероны. Однако этот вопрос не был им исследован.

Настоящая статья является продолжением нашей предыдущей работы [6], в которой был исследован вопрос о появлении гиперонов при высоких плотностях вырожденного газа и рассмотрено влияние гиперонов на уравнение состояния последнего.

Напомним некоторые основные результаты указанной работы.

При плотности барионов $N \geq 6.4 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ (т. е. при $\rho \geq 1.1 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$) сильно вырожденное вещество помимо нуклонов должно неизбежно содержать гипероны и μ^- -мезоны. При более высоких плотностях должны появиться также и π^- -мезоны. Поэтому при плотностях материи, заключенных в пределах $10^{12} \lesssim \rho \lesssim 10^{15} \text{ г/см}^3$, мы имеем дело с нейтронным газом, а при $\rho > 10^{15} \text{ г/см}^3$ — с газом, представляющим собой смесь гиперонов и нуклонов, причем процент гиперонов быстро растет при увеличении плотности.

Концентрации разных частиц в равновесном вырожденном газе определяются следующими уравнениями, содержащими граничные энергии Ферми E и, следовательно, концентрации различных частиц:

$$\left. \begin{aligned} E_{Y^0} &= E_n; & E_{Y^+} &= E_n - E_e; \\ E_{Y^-} &= E_n + E_e; & E_e &= E_\mu = m_\pi c^2; \\ \Sigma N_{Y^+} - \Sigma N_{Y^-} - N_e - N_\mu - N_\pi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где значки Y^0 , Y^+ , Y^- , n , e , μ и π означают соответственно нейтральные, положительные и отрицательные барионы (общее название нуклонов и гиперонов), нейтрон, электрон μ^- — и π^- -мезоны.

Каждой частице соответствует некоторое пороговое значение плотности, начиная с которого, она может присутствовать в среде в качестве стабильной компоненты вещества. Приведенные уравнения целиком определяют концентрации всех частиц, если задано полное число барионов в единице объема. Однако для каждого значения концентрации всех барионов должна быть взята система лишь тех уравнений, которые совместимы с этой концентрацией, а концентрации тех барионов, которые не войдут при этом в систему уравнений, следует положить равными нулю.

Решая уравнения (1.1), мы находим концентрации частиц. Эти концентрации можно выразить через параметры:

$$t_k = 4 \operatorname{arsh} (p_k / m_k c), \quad (1.2)$$

где m_k — масса k -ой частицы, p_k -граничный импульс Ферми,

$$p_k = (6\pi^2 / a_k)^{1/3} \hbar N_k^{1/3} \quad (1.3)$$

для k -частицы, $a_k = 2S_k + 1$ — число спиновых состояний частицы.

Параметры t_k в случае сферической звезды должны быть функциями расстояния r от ее центра. Различные t_k выражаются через t_n следующими соотношениями.

В случае нейтральных частиц, т. е. при $k = n^*$, Λ , Σ^0 и Ξ^0

$$t_k = 4 \operatorname{arch} \left(\frac{m_n}{m_k} \operatorname{ch} \frac{t_n}{4} \right), \quad (1.4)$$

в случае положительных барионов, т. е. при $k = p$, p^* , Σ^+ ,

$$t_k = 4 \operatorname{arch} \left(\frac{m_n}{m_k} \operatorname{ch} \frac{t_n}{4} - \frac{E_e}{m_k c^2} \right), \quad (1.5)$$

и, наконец, в случае отрицательных барионов, т. е. при $k = \Sigma^-$ и Ξ^- :

$$t_k = 4 \operatorname{arch} \left(\frac{m_n}{m_k} \operatorname{ch} \frac{t_n}{4} + \frac{E_e}{m_k c^2} \right), \quad (1.6)$$

π^- — мезоны существуют в звезде лишь при концентрации барионов $N > 5.9 \cdot 10^{40} \text{ см}^{-3}$, т. е. $\rho > 1.4 \cdot 10^{17} \text{ г/см}^3$. При достаточно больших плотностях нет существенной разницы между правыми частями формул (1.4), (1.5) и (1.6). Поскольку $E_e \leq m_\pi c^2$, это всегда будет иметь место, когда

$$\text{ch} \frac{t_n}{4} \gg \frac{m_\pi}{m_n}.$$

§ 2. Основные уравнения равновесных конфигураций

В случае звездных конфигураций обычного типа (например, для Солнца) фактический радиус звезды очень велик по сравнению с ее гравитационным радиусом. В случае же сверхплотных конфигураций эти две величины становятся сравнимыми. Это означает, что нельзя пренебречь эффектами общей теории относительности. Иными словами, все расчеты следует вести, исходя из уравнений тяготения Эйнштейна.

Будем искать решение уравнений Эйнштейна для случая центрально-симметрического распределения вещества. Известно, что при этом можно воспользоваться произвольностью выбора системы отсчета в общей теории относительности таким образом, чтобы четырехмерный интервал имел бы вид [7]:

$$ds^2 = c^2 e^\nu dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\lambda dr^2, \quad (2.1)$$

где ν и λ — функции от r . В каждой конкретной задаче они подлежат определению. Формула (2.1) справедлива не только для случая стационарного распределения вещества в звезде, но и в том случае, когда в ней происходят радиальные движения, причем скорость зависит только от r и t , так что сферическая симметрия распределения вещества не нарушается. Конечно, в этом случае функции ν и λ должны зависеть не только от r , но и от t . Оппенгеймером и Волковым было показано [4], что в статическом случае задача решения уравнений Эйнштейна сводится к решению следующих, сравнительно простых дифференциальных уравнений:

$$\frac{du}{dr} = 4\pi \frac{1}{c^2} r^2 \rho; \quad (2.2)$$

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{P + \rho}{r \left(\frac{c^2}{k} r - 2u \right)} \left(4\pi \frac{1}{c^2} r^3 P + u \right), \quad (2.3)$$

где $P(r)$ — давление, k — постоянная тяготения, а $u(r)$ — определяется формулой

$$u(r) = \frac{c^2 r}{2k} (1 - e^{-\lambda}). \quad (2.4)$$

На границе звезды, где $r = R$, величина $u(R)$ равняется массе звезды, воспринимаемой внешним наблюдателем. Что касается до смысла $u(r)$ для меньших значений r , то из (2.2) видно, что эта величина в известной степени характеризует количество вещества, заключенного внутри сферы радиуса r . Однако в рассматриваемых условиях, когда поле тяготения очень сильное и гравитационный дефект массы может быть большим, понятие «массы, заключенной внутри сферы с радиусом r », нуждается в точном определении. Мы здесь этим заниматься не будем. Для нас достаточно определение (2.4).

Дальше мы будем пользоваться системой единиц, при которых [4]

$$\frac{m_n^4 c^5}{32 \pi^2 \hbar^3} = K_n = \frac{1}{4\pi}; \quad c = k = 1. \quad (2.5)$$

В этих единицах массы и расстояния имеют одинаковую размерность.

Единица расстояния в этой системе равна

$$a \equiv 2\sqrt{2\pi} \left(\frac{h}{m_n c} \right)^{3/2} \frac{c}{\sqrt{km_n}} = 1.37 \cdot 10^6 \text{ см.} \quad (2.6)$$

Единица массы равна

$$b \equiv \alpha \frac{c^2}{k} = 1.85 \cdot 10^{34} \text{ г} = 9.29 \odot. \quad (2.7)$$

Наконец, единица времени равна

$$\delta \equiv a/c = 4.57 \cdot 10^{-5} \text{ сек.} \quad (2.8)$$

В этой системе единиц уравнения (2.2) и (2.3) переписутся в виде:

$$\frac{du}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r); \quad (2.2')$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P+u}{r(r-2u)} (4\pi r^3 P + u). \quad (2.3')$$

Уравнения (2.2') и (2.3') содержат три неизвестные функции ρ , P и u . К ним следует присоединить в качестве третьего уравнения — уравнение состояния, о котором будет идти речь в следующем параграфе.

Решая систему этих трех уравнений, мы найдем семейство решений, каждому из которых будет соответствовать определенная масса, радиус, внутреннее распределение вещества и метрика пространства.

Интегрирование было произведено методом Рунге — Кутты для нескольких вариантов уравнения состояния.

§ 3. Конфигурации, состоящие из идеального газа

Для идеально вырожденного газа уравнение состояния в параметрическом виде представляется в следующей форме [6]:

$$\rho = K_n \sum_k \frac{1}{2} \alpha_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 (\text{sh } t_k - t_k) + N_\pi m_\pi c^2; \quad (3.1)$$

$$P = \frac{1}{3} K_n \sum_k \frac{1}{2} \alpha_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\text{sh } t_k - 8 \text{sh } \frac{t_k}{2} + 3t_k \right), \quad (3.2)$$

N_π — плотность π^- — мезонов. Определение K_n дано в (2.5). Суммирование производится по всем типам частиц, присутствующих в данной точке звезды. Все параметры t_k (а значит, и концентрации N_k), а также N_π , являются функцией плотности вещества. Для расчетов удобно принять в качестве независимой переменной параметр t_n , т. е. концентрацию N_n . Уравнения (3.1) и (3.2) написаны в единицах CGS. В системе единиц (2.5) K_n следует заменить через $1/4\pi$.

Подставив (3.1) и (3.2) в (2.2') и (2.3'), получаем

$$\frac{du}{dr} = r^2 \left[\sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 (\text{sh } t_k - t_k) + N_\pi m_\pi c^2 / K_n \right]; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt_n}{dr} = & -\frac{4 \sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\text{sh } t_k - 2 \text{sh } \frac{t_k}{2} \right) + 3N_\pi m_\pi c^2 / 4K_n}{\sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\text{ch } t_k - 4 \text{ch } \frac{t_k}{2} + 3 \right) \frac{\partial t_k}{\partial t_n}} \times \\ & \times \left\{ u + \frac{1}{3} r^3 \sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\text{sh } t_k - 8 \text{sh } \frac{t_k}{2} + 3t_k \right) \right\}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Итак, для определения внутреннего строения звезды мы должны интегрировать уравнение (3.3) и (3.4). Мы можем также исходить непосред-

ственно из (2.2') и (2.3'). В последнем случае целесообразно предварительно построить на основе формул (3.1) и (3.2) график зависимости $\rho = \rho(P)$, т. е. иметь кривую состояния.

Интегрирование (3.3) и (3.4) необходимо начать с центра звезды, где

$$u(0) = 0; t_n = t_n(0). \quad (3.5)$$

Здесь $t_n(0)$ определяет плотность вещества в центре звезды. При этом различным конфигурациям соответствуют различные значения $t_n(0)$. На практике мы получаем ряд решений, задаваясь различными произвольными значениями $t_n(0)$. Найдя, как это описано в дальнейшем, эти решения, мы можем определить для каждого из них значения наблюдаемых параметров, например, таких, как радиус или масса конфигурации. Таким образом устанавливается зависимость наблюдаемых параметров от $t_n(0)$. После этого, исключив $t_n(0)$, мы можем определить любой из наблюдаемых параметров, как функцию одного из них. В частности, таким образом, можно получить зависимость между массой и радиусом для нашего семейства конфигураций. Что касается первого из начальных условий (3.5), то оно означает, что в центре звезды нет точечной массы.

В случае, когда мы непосредственно пользуемся уравнениями (2.2') и (2.3'), начальные условия будут иметь вид:

$$u(0) = 0; \rho = \rho(0); P = P(\rho(0)), \quad (3.6)$$

где $\rho(0)$ — плотность в центре данной конфигурации.

Исходя из начальных условий, интегрирование выполняется шаг за шагом, вплоть до $r = R$, где R определяется из условия $\rho(R) = P(R) = t_n(R) = 0$. Тогда R будет означать координатный радиус конфигурации, а $u(R) \equiv M$ — ее массу.

Т а б л и ц а 4

Некоторые наиболее важные параметры гиперонных звезд, состоящих из идеального газа барионов

$t_n(0)$	Звезда						Гиперонное ядро звезды			
	Центральная плотность		Масса		Координатный радиус		Масса		Координатный радиус	
	барионов $N(0), \text{см}^{-3}$	материи $4\pi \cdot \rho(0), \text{г/см}^3$	в едн. (2.5)	в едн. \odot	в едн. (2.5)	в км	в едн. (2.5)	в едн. \odot	в едн. (2.5)	в км
0.566	$1.00 \cdot 10^{37}$	$1.62 \cdot 10^{13}$	0.0147	0.136	2.090	28.7	—	—	—	—
1.0	$6.50 \cdot 10^{37}$	$1.00 \cdot 10^{14}$	0.0329	0.306	1.537	21.1	—	—	—	—
1.3	$1.36 \cdot 10^{38}$	$2.24 \cdot 10^{14}$	0.0443	0.411	1.345	18.4	—	—	—	—
1.5	$2.20 \cdot 10^{38}$	$3.62 \cdot 10^{14}$	0.0495	0.460	1.170	16.0	—	—	—	—
1.8	$3.85 \cdot 10^{38}$	$6.60 \cdot 10^{14}$	0.0600	0.557	1.065	14.6	—	—	—	—
2.4	$1.25 \cdot 10^{39}$	$2.34 \cdot 10^{15}$	0.0683	0.634	0.805	11.0	0.0132	0.123	0.245	3.36
2.75	$3.1 \cdot 10^{39}$	$5.92 \cdot 10^{15}$	0.0622	0.578	0.753	10.3	0.0234	0.217	0.270	3.20
3.0	$5.45 \cdot 10^{39}$	$1.09 \cdot 10^{16}$	0.0559	0.519	0.703	9.63	0.0255	0.237	0.254	3.48
3.3	$1.08 \cdot 10^{40}$	$3.62 \cdot 10^{16}$	0.0484	0.450	0.670	9.18	0.0258	0.240	0.232	3.18
4.0	$3.50 \cdot 10^{40}$	$8.29 \cdot 10^{16}$	0.0354	0.329	0.594	8.14	0.0225	0.209	0.185	2.54
5.0	$1.26 \cdot 10^{40}$	$3.45 \cdot 10^{17}$	0.0245	0.228	0.506	6.93	0.0173	0.161	0.137	1.88
6.0	$3.53 \cdot 10^{41}$	$1.15 \cdot 10^{18}$	0.0191	0.177	0.557	7.63	0.0135	0.125	0.115	1.57
7.0	$9.36 \cdot 10^{41}$	$3.39 \cdot 10^{18}$	0.0237	0.220	0.767	10.5	0.0115	0.107	0.112	1.53
∞	∞	∞	0.0349	0.324	0.808	11.1	0.0130	1.121	0.145	1.99

Примечание. Под координатными радиусами подразумевается значения r на поверхности звезды и гиперонной сферы.

Для характеристики звездной конфигурации представляет интерес масса той области, в которой имеются гипероны, т. е. масса гиперонного ядра. Гипероны могут существовать в равновесном состоянии, начиная с $t_n = 2.1$. Следовательно, величина R_h , при которой $t_n(R_h) = 2.1$ будет представлять собой координатный радиус гиперонной сферы. Что касается до массы, сосредоточенной в этой сфере, то некоторой ее мерой будет величина $u(R_h)$, которую мы обозначим через M_h . Результаты вычислений собраны в табл. 1. В ней, наряду с данными о концентрации барионов и плотности в центре звезды, приведены значения массы и координатного радиуса как для всей звезды, так и для гиперонного ядра, причем масса гиперонного ядра условно понимается в приведенном выше смысле. Первые пять моделей (первые пять строчек таблицы)

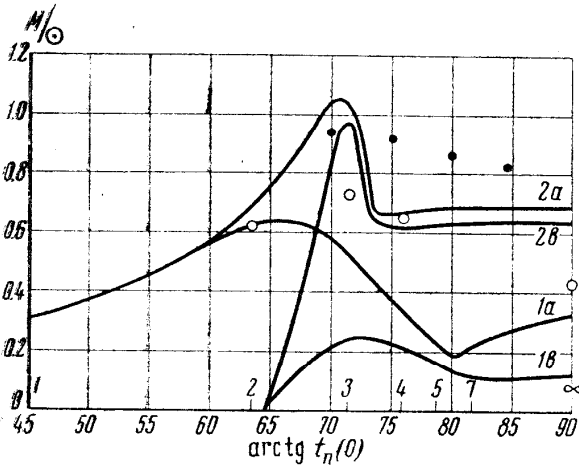


Рис. 1

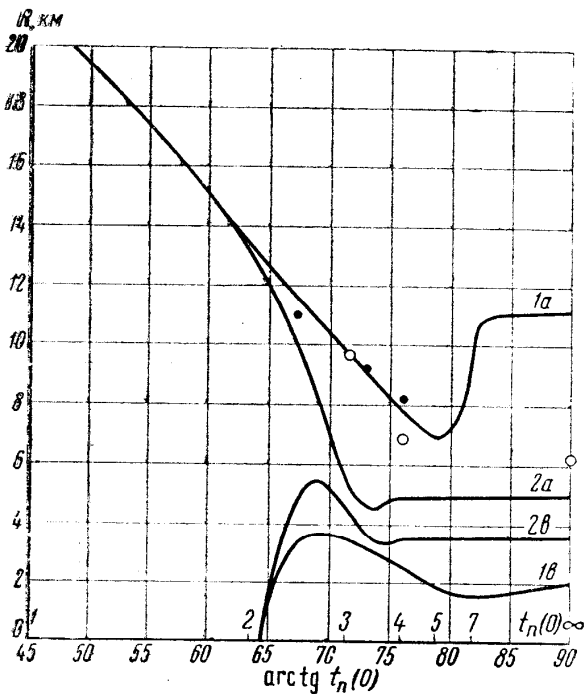


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость массы звезды от параметра $t_n(0)$, определяющего плотность материи в центре. Определение t_n дано в (1.2). Кривые 1a и 1b изображают массу звезды и ее гиперонного ядра в том случае, когда элементарные частицы при любых плотностях образуют идеальный газ. Кривые 2a и 2b изображают то же самое, когда учитываются силы отталкивания, действующие между барионами при очень больших плотностях (реальный газ). Черные кружки изображают массу конфигураций, состоящих из нейтронов, с учетом сил отталкивания. Белые кружочки изображают массу конфигураций, состоящих из идеального газа нейтронов (расчет Оппенгеймера — Волкова). Масса выражена в единицах массы Солнца

Рис. 2. Зависимость координатного радиуса звезды и координатного радиуса ее гиперонного ядра от параметра $t_n(0)$. Смысл обозначений тот же самый, что на рис. 1. Радиус выражен в километрах

не содержат гиперонных ядер. Они являются чисто нейтронными. Данные этих пяти строк хорошо соответствуют результату работы Оппенгеймера и Волкова. Начиная со значения центральной плотности, соответствующего $t_n(0) = 2.1$, характеристики наших конфигураций расходятся с характеристиками чисто нейтронных конфигураций.

На рис. 1 кривая 1a изображает зависимость массы конфигурации от $t_n(0)$. Для сравнения даны кружочки, изображающие результаты Оппенгеймера и Волкова, в которых существование гиперонов не учитывалось. Как видно из рисунка, учет гиперонов ведет к уменьшению массы конфигурации.

Кривая $1b$ на том же рис. 1 представляет массу гиперонного ядра в указанном выше смысле. Как видно из рисунка, при $3 < t_n(0) < 7$ значительная часть массы конфигурации содержится в гиперонном ядре. Значение массы звезды имеет минимум при $t_n(0) \approx 6$, что соответствует концентрации барионов порядка $3.5 \cdot 10^{41} \text{ см}^{-3}$. При этих плотностях материи вырожденный газ барионов становится релятивистским.

На рис. 2 кривая $1a$ изображает зависимость координатного радиуса от

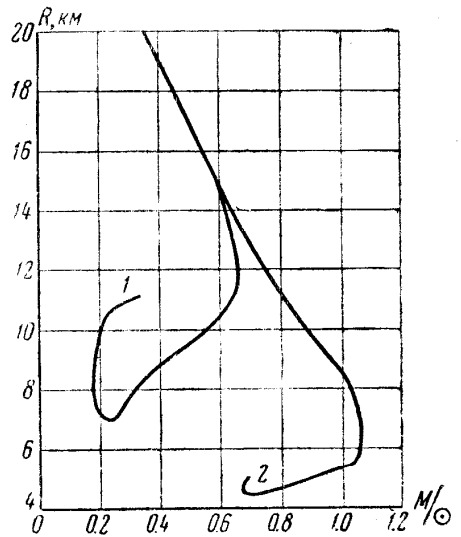


Рис. 3. Соотношение масса-радиус для барионных звезд. Кривая 1 относится к конфигурациям, состоящим из идеального газа барионов, а кривая 2 — из реального газа барионов. Радиус измерен в километрах. Под радиусом подразумевается значение координаты r на поверхности звезды

$t_n(0)$, а кривая $1b$ — зависимость координатного радиуса гиперонного ядра от той же величины.

На рис. 3 кривая 1 изображает зависимость между координатным радиусом и массой для конфигураций, рассчитанных в настоящей работе.

§ 4. Случай бесконечной плотности в центре

В общем случае численное интегрирование наших уравнений не связано с затруднениями, когда плотность в центре представляет конечную величину. Является, однако, интересным рассмотреть предельный случай, когда $t_n(0) = \infty$. Как видно из рис. 3, радиус и масса стремятся при этом к конечным пределам. Следовательно, должна существовать предельная конфигурация, для которой $\rho(0) = \infty$. При очень больших плотностях барионный газ становится крайне релятивистским. При таких плотностях можно принять, что $P \approx \rho/3$. Однако мы будем писать

$$P = z\rho, \quad (4.1)$$

так как в дальнейшем такое же рассуждение нами будет применено к другому случаю, где $z \neq 1/3$. Итак, в рассматриваемом здесь случае $z = 1/3$ соотношение (4.1) выполняется приближенно, начиная от центра до тех расстояний, где барионный газ перестает быть крайне релятивистским.

Внутри этой центральной сферы $t_n(r) \gg 1$ и решение уравнений (2.2') и (2.3') можно искать в следующем виде:

$$4\pi \cdot \rho(r) = \frac{a}{r^n}. \quad (4.2)$$

Подстановка (4.2) и (4.1) в уравнения (2.2') и (2.3') сразу дает

$$n = 2; \quad a = \frac{2z}{4z + (1+z)^2}. \quad (4.3)$$

В результате получаем решение в виде:

$$4\pi\rho = \frac{a}{r^2}; \quad u(r) = ar. \quad (4.4)$$

В частности, при $z = 1/3$, имеем $a = 3/14$

$$4\pi \cdot \rho(r) = \frac{3}{14} \frac{1}{r^2}; \quad u(r) = \frac{3}{14} r. \quad (4.5)$$

Решение (4.5) нами было принято до расстояния $r = 6,9 \cdot 10^{-4}$. На этом расстоянии мы имеем $\rho = 3,58 \cdot 10^4$; $P = 1,14 \cdot 10^4$ и $u = 1,48 \cdot 10^{-4}$. Здесь все величины даются в единицах (2.5). Принимая эти значения r , ρ , P и u за начальные условия, уравнения (2.2') и (2.3') были проинтегрированы затем численно до границы звезды, т. е. до расстояния, где $\rho = P = 0$. В ходе численного решения выяснилось, что полученное нами асимптотическое решение продолжает оставаться удовлетворительным даже при значениях r , значительно превосходящих $6,9 \cdot 10^{-4}$, т. е. то значение r , с которого мы начали численное интегрирование. Так, например, на расстоянии $r = 5,5 \cdot 10^{-3}$ значение u , вычисленное согласно асимптотическому решению лишь на 1% отличается от точного.

Как видно из последней строки табл. 1, предельная масса, соответствующая рассматриваемому здесь решению, равна $0,324 \odot$, а $R = 11,1$ км.

Соответствующая конфигурация в теории Оппенгеймера и Волкова имеет массу $0,43 \odot$ а радиус $6,2$ км. Очевидно, по ошибке в работе Оппенгеймера и Волкова приводятся значения $M = 0,34 \odot$, $R = 3,1$ км.

§ 5. Конфигурации неидеального газа барионов

Анализ экспериментов, относящихся к изучению столкновений нуклонов высоких энергий, показал, что на малых расстояниях порядка $0,4$ ферми и меньше, между частицами, по-видимому, действуют весьма мощные силы отталкивания. Эти силы иногда аппроксимируют в виде δ -функции Дирака, т. е. предполагается, что нуклон имеет твердую сердцевину с радиусом порядка $0,2$ ферми. Из сказанного следует, что при плотностях барионов $N \gtrsim 10^{40}$ см $^{-3}$ ($t_n \gtrsim 3,2$), когда среднее расстояние между частицами $l < 0,5$ ферми, барионный газ уже нельзя считать идеальным.

К сожалению, нам плохо известно поведение ядерных сил при больших скоростях частиц. Очевидно, что эти силы зависят существенным образом не только от расстояния, но и от скоростей и спинов частиц. Однако строгого описания взаимодействия нуклонов при больших скоростях мы еще не имеем. Что касается гиперонов, то о характере их взаимодействия ничего не известно. Можно только сказать, что они также являются сильно взаимодействующими (ядерно-активными) частицами.

При таком положении дел, конечно, трудно построить строгую теорию сверхплотных конфигураций, учитывающую взаимодействие барионов. Однако можно попытаться грубо учесть в уравнении состояния эффект этого взаимодействия с тем, чтобы определить направление и порядок изменений параметров (масса, радиус и другие), характеризующих звезду. Очевидно, что введение на малых расстояниях сил отталкивания между барионами приведет к увеличению внутреннего давления и, следовательно, масс конфигураций.

Нами было предположено, что, независимо от вида барионов, на каждую частицу приходится потенциальная энергия

$$U(N) = 3,2 \cdot 10^{-83} N^2 - 6,4 \cdot 10^{-5}, \quad (5.1)$$

где N — плотность барионов. Эта формула подобрана таким образом, чтобы при $N > 10^{40}$ см $^{-3}$ она превысила кинетическую энергию частиц (включая энергию покоя), а при плотностях более низкого порядка совпала бы с глубиной потенциальной ямы в обычной ядерной материи. Так, согласно (5.1), при $N = 1,5 \cdot 10^{40}$ см $^{-3}$ имеем $U/E \approx 4$; а при $N = 10^{41}$, $U/E \approx 125$. При этом, $E = mc^2(1 - \beta^2)^{-1/2}$ представляет собою верхнюю границу кинетической энергии при данной плотности. Как мы видим, формула (5.1) качественно соответствует реальной картине. Однако при наших расчетах звездных конфигураций мы пренебрегли постоянным членом в (5.1). Это не имеет существенного значения, и, по-видимому, учет этого члена привел

бы лишь к небольшому уменьшению массы. Повторяем, что здесь нашей целью является получение лишь качественной картины.

Учитывая (5.1), мы найдем для уравнения состояния [6]:

$$\rho = \rho_0 + NU(N); P = P_0 + N^2 \frac{\partial U}{\partial N}, \quad (5.2)$$

где ρ_0 и P_0 означают плотность энергии и давление для идеального газа барионов. Формулы (5.2) в случае малых плотностей превращаются в (3.1) и (3.2)

Подставляя (5.2) в уравнения (2.2') и (2.3'), находим

$$\frac{du}{dr} = r^2 \left\{ \sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 (\text{sh } t_k - t_k) + \frac{1}{K_n} [NU(N) + N_\pi \cdot m_\pi c^2] \right\}. \quad (5.3)$$

$$\frac{dt_n}{dr} = - \frac{4}{r(r-2u)} \times$$

$$\times \frac{\sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\text{sh } t_k - 2 \text{sh } \frac{t_k}{2} \right) + \frac{3}{4K_n} \left[NU(N) + N^2 \frac{dU}{dN} + N_\pi m_\pi c^2 \right]}{\sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\text{ch } t_k - 4 \text{ch } \frac{t_k}{2} + 3 \right) \frac{\partial t_k}{\partial t_n} + \frac{3}{K_n} \frac{d}{dN} \left(N^2 \frac{dU}{dN} \right) \frac{dN}{dt_n}} \times (5.4)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{3} r^3 \left[\sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\text{sh } t_k - 8 \text{sh } \frac{t_k}{2} + 3t_k \right) + \frac{3}{K_n} N^2 \frac{dU}{dN} \right] + u(r) \right\}.$$

Интегрирование этой системы уравнений выполнялось численно, для чего заранее были построены графики, представляющие правые части (5.3) и (5.4) как функции параметра t_n .

Таблица 2

Некоторые наиболее важные параметры гиперонных звезд, состоящих из реального газа барионов

$t_n(0)$	Звезда						Гиперонное ядро звезды			
	Плотность в центре		Масса		Координатный радиус		Масса		Координатный радиус	
	барионов $N(0), \text{ см}^{-3}$	материи $4\pi r(0) \text{ г/см}^3$	в едн. (2.5)	в едн. \odot	в едн. (2.5)	в км	в едн. (2.5)	в едн. \odot	в едн. (2.5)	в км
2.1	$6.40 \cdot 10^{38}$	$1.12 \cdot 10^{15}$	0.0770	0.715	0.892	12.2	—	—	—	—
2.2	$7.80 \cdot 10^{38}$	$1.44 \cdot 10^{15}$	0.0818	0.760	0.855	11.7	0.0073	0.0678	0.220	3.01
2.4	$1.25 \cdot 10^{39}$	$2.36 \cdot 10^{15}$	0.0926	0.860	0.740	10.0	0.038	0.353	0.346	4.74
2.6	$2.10 \cdot 10^{39}$	$4.31 \cdot 10^{15}$	0.108	1.007	0.607	8.32	0.079	0.734	0.393	5.38
3.0	$5.45 \cdot 10^{39}$	$1.67 \cdot 10^{16}$	0.111	1.028	0.394	5.40	0.104	0.966	0.325	4.45
3.1	$6.95 \cdot 10^{39}$	$3.56 \cdot 10^{16}$	0.102	0.947	0.370	5.07	0.098	0.910	0.305	4.18
3.2	$8.75 \cdot 10^{39}$	$5.75 \cdot 10^{16}$	0.0912	0.847	0.348	4.77	0.088	0.817	0.281	3.85
3.3	$1.08 \cdot 10^{40}$	$9.68 \cdot 10^{16}$	0.0836	0.777	0.341	4.67	0.080	0.743	0.268	3.67
3.4	$1.30 \cdot 10^{40}$	$1.38 \cdot 10^{17}$	0.0724	0.673	0.328	4.50	0.070	0.650	0.247	3.38
3.8	$2.60 \cdot 10^{40}$	$5.46 \cdot 10^{17}$	0.0717	0.666	0.349	4.79	0.0665	0.618	0.252	3.46
4.0	$3.50 \cdot 10^{40}$	$1.61 \cdot 10^{18}$	0.0722	0.670	0.358	4.90	0.0663	0.615	0.257	3.52
5.0	$1.26 \cdot 10^{41}$	$7.25 \cdot 10^{19}$	0.0738	0.686	0.360	4.93	0.068	0.631	0.259	3.55
5.32	$1.80 \cdot 10^{41}$	$2.01 \cdot 10^{20}$	0.0738	0.686	0.360	4.93	0.068	0.631	0.259	3.55
6.00	$3.53 \cdot 10^{41}$	$1.55 \cdot 10^{21}$	0.0738	0.686	0.360	4.93	0.068	0.631	0.259	3.55
7.00	$9.36 \cdot 10^{41}$	$2.88 \cdot 10^{22}$	0.0738	0.686	0.360	4.93	0.068	0.631	0.259	3.55
∞	∞	∞	0.0744	0.6905	0.3615	4.95	0.0692	0.643	0.2625	3.60

Результаты расчетов приведены в табл. 2 и на рис. 1, 2 и 3. Кривые 2a и 2b на рис. 1 изображают зависимость массы звезды и ее гиперонного

ядра от $t_n(0)$. Мы видим, что введение сил отталкивания, действующих на малых расстояниях, приводит к заметному увеличению возможных значений массы звезды по сравнению с массой конфигураций, состоящих из идеального газа.

Спрашивается, насколько существенно связан этот вывод с специальным видом потенциала сил отталкивания? Можно ли для гиперонных звезд получить массы, во много раз превышающие массу Солнца, если подходящим образом выбрать функцию потенциала отталкивания? Для статических конфигураций ответ отрицателен. Произведенные нами расчеты убеждают, что при разумном выборе величины радиуса действия сил отталкивания, независимо от их интенсивности, невозможно получить статические конфигурации с большими массами. Фактически это показано в следующем параграфе на примере модели несжимаемой жидкости. Причиной невозможности получения больших масс (по сравнению с солнечной), является то обстоятельство, что, согласно теории тяготения Эйнштейна, размеры статических конфигураций, в которых плотность выше некоторой границы не могут превысить некоторый предел, так как гравитационный радиус не может превысить половину обычного радиуса.

Как показывает кривая 2а, значение массы имеет хорошо выраженный максимум при $t_n(0) \approx 3$ ($N \approx 5.5 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}$). При $t_n(0) > 4$ ($N > 3.5 \cdot 10^{40} \text{ см}^{-3}$) масса звезды остается почти постоянной, т. е. не зависит от плотности в центре конфигурации. При этом интересно, что для всех этих значений $t_n(0)$ большая часть вещества звезды сосредоточена в гиперонном ядре. Точно так же для $t_n(0) > 4$ очень мало меняется радиус конфигурации.

Кривые 2а и 2б на рис. 2 изображают зависимость координатного радиуса звезды и координатного радиуса гиперонного ядра от $t_n(0)$. Как видим, радиус звезды при возрастании центральной плотности сначала убывает, а затем остается приблизительно постоянным. Сравнение кривых 1а и 2а показывает, что в случае реального газа радиус конфигурации заметно меньше, чем в случае идеального газа. Для радиуса гиперонных ядер тех же конфигураций соотношение является обратным.

На рис. 3 (кривая 2) представлено соотношение между массой и координатным радиусом конфигурации, состоящей из реального газа. Мы видим, что не для всех значений массы радиус является однозначной функцией от нее.

Заметим, однако, что, строго говоря, в нашей теории основным параметром, характеризующим конфигурацию, является число барионов в звезде, а не значение массы. Две конфигурации с одним и тем же числом барионов n могут обладать не только различными радиусами, но и различными массами, поскольку дефект массы у них может быть различным. Устойчивой будет та конфигурация, которой соответствует меньшая масса (большой дефект массы). Поэтому отбор устойчивых конфигураций может быть произведен строго лишь на основании диаграммы, связывающей величины n и M .

Для сравнения были вычислены также конфигурации из нейтронного реального газа в предположении, что потенциальная энергия и в этом случае определяется выражением (5.1). Полученные результаты представлены на рис. 1 зачерненными кружками. Из рисунка видно, что при данной центральной плотности масса конфигураций, содержащих гипероны, заметно меньше массы гипотетической чисто нейтронной звезды.

Отметим, наконец, что и в случае неидеального газа была отдельно исследована модель, для которой $t_n(0) = \infty$. Исследование было проведено тем же способом, который был применен в предыдущем параграфе к случаю идеального газа. Нетрудно видеть, что в этом случае при $t_n \rightarrow \infty$, имеем

$$P = 2\rho, \quad (5.5)$$

ными словами, $z = 2$. Из (5.5) мы получаем асимптотическое решение

$$\rho(r) = \frac{4}{17} \frac{1}{r^2}; \quad u(r) = \frac{4}{17} r. \quad (5.6)$$

Это решение мы считали приемлемым до расстояния $r = 2 \cdot 10^{-4}$, где $t_n = 6.3$, $\rho(r) = 4.7 \cdot 10^5$; $P = 9.4 \cdot 10^5$. Далее, принимая эти значения за начальные условия, было проведено интегрирование до той точки, в которой плотность обращается в нуль.

После того, как была проведена значительная часть наших вычислений, нам стала известна работа Камерона [5]. В ней рассчитаны нейтронные конфигурации в предположении, что плотность энергии равна

$$\varepsilon = 7.98 \cdot 10^9 \rho_m^{5/3} + 9.79 \cdot 10^{-6} \rho_m^{5/3} - 1.381 \cdot 10^5 \rho_m^2, \quad (5.7)$$

где $\rho_m = Nm_n$ — плотность в $г/см^3$, $\varepsilon + Nm_n$ соответствует нашему ρ . В формуле (5.7) первый член представляет собою кинетическую энергию нейтронов, а два последних члена — плотность потенциальной энергии.

Описываемое формулой (5.7) взаимодействие нейтронов становится заметным на более далеких расстояниях, чем взаимодействие, описываемое нашей формулой (5.1). Поэтому модели, получаемые Камероном, должны отличаться от моделей, вычисленных для идеального Ферми газа, несколько больше, чем модели нейтронных звезд, вычисленные на основании формулы взаимодействия (5.1).

И действительно, полученные Камероном значения масс конфигураций при заданных t_n (0) значительно превышают вычисленные, исходя из (5.1), значения массы, которые нанесены на рис. 1 черными кружками.

Впрочем, значения массы, полученные Камероном, нам кажутся слишком большими, и было бы желательно провести более подробные количественные сравнения.

§ 6. Модель несжимаемой жидкости

В настоящем параграфе мы будем рассматривать «идеальный газ», состоящий из барионов, имеющих конечные размеры. Когда частицы не соприкасаются друг с другом, энергия взаимодействия равна нулю. С другой стороны, частицы являются абсолютно твердыми и взаимно непроницаемыми.

Мы допустим также, что частицы всех типов имеют один и тот же собственный радиус, однако, будем учитывать лоренцово сжатие.

Для подобного газа должна существовать некоторая максимальная плотность ρ_m , при которой пространство упаковано частицами с максимальной плотностью. Может случиться, что в данной конфигурации эта максимальная плотность достигается на некотором расстоянии R_0 от центра.

Мы будем иметь следующее выражение для плотности

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \sum_k \frac{1}{2} a_k \left(\frac{m_k}{m_n}\right)^4 (\text{sh } t_k - t_k) + m_n c^2 N_n, & \text{при } r > R_0, \\ \rho_m = \text{const}, & \text{при } r < R_0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Что касается давления P , то при $r > R_0$, оно определяется формулой (3.2), а при $r < R_0$ оно будет расти до некоторого максимального значения в центре.

Выясним при каких значениях параметра t_n наступает несжимаемость. Очевидно, что для этого значения t_n мы должны иметь

$$\tau(t_n) \approx 1, \quad (6.2)$$

где τ — суммарный объем частиц, заключенных в единице объема звезды, вычисленный с учетом сокращения Лоренца. При этом, конечно, мы долж-

ны в τ включить также промежутки, остающиеся при плотной упаковке частиц. Для объема τ имеем

$$\tau = b \sum_k \frac{1}{2} a_k \int_0^{p_k} \frac{m_k c^2}{E_k(p)} \frac{p^2 dp}{\pi^2 h^3}, \quad (6.3)$$

где b — собственный объем, приходящийся на один барион.

Выполняя интегрирование, получаем

$$\tau(t_n) = b \sum_k \alpha_k \left(2sh \frac{t_k}{2} - t_k \right), \quad (6.4)$$

где введено обозначение

$$\frac{a_k}{16\pi^2} \left(\frac{m_k c}{h} \right)^3 \equiv \alpha_k.$$

Таким образом из (6.2) и (6.4) следует, что несжимаемость начинается со значения параметра t_n , удовлетворяющего уравнению

$$b \sum_k \alpha_k [2sh(t_k/2) - t_k] = 1. \quad (6.5)$$

Для решения уравнения (6.5) необходимо иметь значение параметра b . Мы примем, что значение b равняется учетверенному собственному объему ядра. Имея в виду, что это значение должно быть порядка 10^{-40} см³, примем, например, что $b = 4,5 \cdot 10^{-40}$ см³. Подставляя это значение в уравнение (6.5), найдем для t_n^0

$$t_n^0 = 2.65$$

Теперь определим массу и радиус центрального ядра, состоящего из несжимаемой материи. Согласно (2.2') и (2.3') имеем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= 4\pi r^2 \rho_m; \\ \frac{dP}{dr} &= - \frac{P + \rho_m}{r(r - 2u)} (4\pi r^3 P + u), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где ρ_m и есть наша максимальная плотность, равная 0.63, при которой наступает несжимаемость. Приведенное значение ρ_m определено из уравнения:

$$\rho_m = \frac{1}{4\pi} \sum_k \frac{1}{2} a_k (sh t_k^0 - t_k^0), \quad (6.7)$$

где $t_k^0 \equiv t_k(t_n^0)$ — постоянные числа.

Интегрируя (6.5) в пределах от нуля до r и учитывая, что $u(0) = 0$, получаем

$$u(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_m r^3. \quad (6.8)$$

Подставляя (6.8) в (6.6) и интегрируя от центра звезды до границы несжимаемой сферы, получаем для координатного радиуса этой сферы

$$R_0 = \left\{ \frac{2}{8\pi\rho_m} \left[1 - \left(\frac{3P_m + \rho_m}{P_m + \rho_m} \frac{P_c + \rho_m}{3P_c + \rho_m} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (6.9)$$

где P_c и P_m соответственно давление в центре звезды и на поверхности несжимаемой сферы. В уравнение (3.2'), подставляя $t_n^0 = 2.65$, находим $\rho_m = 0.625$; $P_m = 0.0342$.

Из (6.9) и (6.8) получаем массу всей несжимаемой сферы:

$$u(R_0) = \frac{0.613}{\sqrt{4\pi\rho_m}} \left[1 - \left(\frac{3P_m + \rho_m}{P_m + \rho_m} \frac{P_c + \rho_m}{3P_c + \rho_m} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (6.10)$$

Подставляя $\rho_m = 0.63$ и $P_m = 0.034$ в (6.9) и в (6.10), получаем

$$R_0 = 0.436 \left[1 - 1.22 \left(\frac{P_c + \rho_m}{3P_c + \rho_m} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad (6.11)$$

$$u(R_0) = 0.22 \left[1 - 1.22 \left(\frac{P_c + \rho_m}{3P_c + \rho_m} \right)^2 \right]^{3/2}.$$

Рассматривая, в частности, конфигурации, для которых $P_c > \rho_m$, получаем для массы и радиуса несжимаемой сферы при $t_n^0 = 2.65$

$$u(R_0) = 0.175; R = 0,406. \quad (6.12)$$

Далее, считая, что уравнение состояния определяется формулами (3.1) и (3.2), и, исходя из начальных условий (6.12), мы можем проинтегрировать уравнения (2.2) и (2.3) до границы звезды, т. е. до такого расстояния R , где

$$\rho(R) = P(R) = 0,$$

в результате мы получили

$$R = 6 \text{ км}; M = 1.7\odot. \quad (6.13)$$

Выбирая для объема b большее значение, мы могли бы получить большую массу конфигурации.

Заключение

Проведенные расчеты показывают, что массы равновесных конфигураций вырожденного, невращающегося барионного газа в том случае, когда мы считаем газ идеальным, оказываются порядка половины массы Солнца, а радиусы достигают нескольких километров.

Массы вырожденных конфигураций, рассчитанных для реального ферми газа барионов в предположении, что на малых расстояниях между барионами действуют силы отталкивания, заметно больше масс конфигураций из идеального газа. Однако, и в этом случае получаются небольшие массы порядка массы Солнца. Даже если изменить принятый закон отталкивания, мы все же не можем получить конфигураций с массами, сильно превосходящими по порядку массу Солнца.

При достаточно больших центральных плотностях размеры и массы наружных областей барионной звезды, т. е. нейтронного слоя протонно-электронного слоя, составляют небольшую часть общей массы и размеров звезды. Основная часть массы в этих случаях входит в гиперонное ядро. Поэтому эти конфигурации удобно называть гиперонными.

Конфигурации с несколько меньшими центральными плотностями ($\rho < 10^{15} \text{ г/см}^3$) не имеют гиперонных ядер и состоят целиком из нейтронов.

Считаем своим долгом выразить благодарность работникам Вычислительного центра АН АрмССР за выполнение части расчетов по интегрированию дифференциальных уравнений исследуемых конфигураций. Мы признательны также сотруднице института Физики АН АрмССР Г. С. Сарксян и лаборантке физического факультета Ереванского Государственного университета Н. Г. Акопян за проведение большого числа расчетов.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук АрмССР

Поступила в редакцию
25 января 1961 г.

Литература

1. G. G a m o v, Atomic Nuclei and Nuclear Transformations, Oxford, 1936.
2. L. L a n d a u, Nature, 141, 333, 1938.
3. Л. Л а н д а у и Е. Л и ф ш и ц, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.
4. J. R. O r r e n h e i m e r and G. M. V o l k o f f, Phys. Rev., 55, 374, 1939.
5. А. Г. В. С а м е г о н, Astrophys. J., 130, 884, 1959.
6. В. А. А м б а р ц у м я н и Г. С. С а а к я н, Астрон. ж. 37, 193, 1960.
7. Л. Л а н д а у и Е. Л и ф ш и ц, Теория поля, Физматгиз, 1960.